



Μάθημα/Τάξη:	ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ
Κεφάλαιο:	1ο ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΟΡΙΑ
Όνοματεπώνυμο Μαθητή:	
Ημερομηνία:	6/11/2017
Επιδιωκόμενος Στόχος:	70/100

ΘΕΜΑ Α

A.1. Αν $P(x)$ πολυώνυμο n -οστού βαθμού να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$.

Μονάδες 5

A.2. Πότε μια συνάρτηση f ονομάζεται 1-1;

Μονάδες 5

A.3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιο σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 1$

ii. Αν η $f : R \rightarrow R$ είναι γνησίως μονότονη τότε η γραφική της παράσταση τέμνει τον xx' σε ένα μόνο σημείο.

iii. Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο X_0 και ισχύει $f(x) < g(x)$ κοντά στο X_0 , τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

iv. Αν f, g είναι δυο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού A, B αντιστοίχως τότε η συνάρτηση $g \circ f$ ορίζεται αν $f(A) \cap B \neq \emptyset$.

v. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα τότε και η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 10

A.4. Θεωρήστε τον παρακάτω συλλογισμό.

«Κάθε άρτια συνάρτηση είναι 1-1»

Επιμέλεια Θεμάτων Θέος Κωνσταντίνος
Μαθηματικός



A. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω συλλογισμό , γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα Α , αν είναι Αληθής ή το γράμμα Ψ , αν είναι Ψευδής.

Μονάδες 1

B. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα Α.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Β

ΑΣΚΗΣΗ 1η

Έστω $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ για την οποία ισχύει ότι $|f(x) - 3x - 2| \leq x^2$, για κάθε $x \in \mathcal{R}^*$.

B.1. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$.

Μονάδες 6

B.2. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) + \eta\mu 2x}{\sqrt{x+4} - 2}$.

Μονάδες 7

ΑΣΚΗΣΗ 2η

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{ax+2}{x-1}$, $a \neq -2$.

B'.1. Να βρείτε την τιμή του $a \in \mathcal{R}$ για την οποία $(f \circ f)(x) = x$ για κάθε $x \neq 1$.

Μονάδες 3

B'.2. Έστω $a=1$:

i. Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 3

ii. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται .

Μονάδες 3

iii. Να λύσετε την εξίσωση $(f \circ f \circ f \circ f)(x) + (f \circ f)(x) = x + 4$.

Μονάδες 3



ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο \mathcal{R} , με σύνολο τιμών το \mathcal{R} για την οποία ισχύει ότι $f^3(x) + f(x) = 2x$ για κάθε $x \in \mathcal{R}$.

Γ.1. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .

Μονάδες 8

Γ.2. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία $O(0,0)$ και $A(1,1)$.

Μονάδες 4

Γ.3. Να λύσετε την εξίσωση $f(f^{-1}(e^x) - 1) = 0$.

Μονάδες 7

Γ.4. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της f^{-1} .

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x - e^{2-x} + c, c \in \mathcal{R}$.

Δ.1. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

Μονάδες 8

Δ.2. Αν $f^{-1}(2) = 0$ να βρείτε την τιμή του c .

Μονάδες 4

Για $c = e^2 + 2$,

Δ.3. Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f^{-1} με την ευθεία $y=x$, αν θεωρήσουμε γνωστό $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$.

Μονάδες 5



Δ.4. Να λύσετε την ανίσωση $e^{2-x} - e^2 < x$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ'(προαιρετικό)

Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ και $a > 0$ για την οποία ισχύει:
 $(f \circ f)(x) = a(x^2 + 1)$ για κάθε $x > 0$.

Δ.1. Να αποδείξετε ότι $f(a(x^2 + 1)) = a(f^2(x) + 1)$ για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 8

Δ.2. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

Μονάδες 7

Δ.3. Έστω ότι C_f και $C_{f^{-1}}$ τέμνονται σε σημείο με τετμημένη X_0 . Να αποδείξετε ότι :

i. $a \leq \frac{1}{2}$

Μονάδες 5

ii. $f(x_0) \geq a$

Μονάδες 5

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!