Μάθημα/Τάξη	Γ' Λυκείου
Κεφάλαιο	Παράγωγοι - Θ.Rolle / Θ.Μ.Τ - Ακρότατα - Κυρτότητα - Ασύμπτωτες - Ολοκληρώματα
Ονοματεπώνυμο Μαθητή	
Ημερομηνία	6/2/2017
Επιδιωκόμενος στόχος	70/100

ΘΕΜΑ Α (5+10+10)

Α1. **α)** Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0;

β) Πότε μια συνάρτηση f λέγεται κυρτή σε ένα διάστημα Δ ;

Α2. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 τότε να αποδείξετε ότι είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος**:

α. Αν $\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ τότε η f παραγωγίζεται στο x_0.

β. Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής στο x_0 τότε ορίζεται πάντα εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(x_0, f(x_0))$.

γ. Αν f συνεχής στο R τότε η γραφική παράσταση της f δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

δ. Αν $x_0 \in \Delta$ και $f'(x_0)\neq 0$ τότε η f δεν παρουσιάζει ακρότατο στο x_0.

ε. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής και γνωσίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ, τότε η παράγωγος της είναι υποχρεωτικά θετική.

ΘΕΜΑ Β (4+8+8+5)

Β1. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα [1,2] με f(2)≠6. Αν f(1)+f(2)=8, να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1,2)$ τέτοιο ώστε

$$f(x_0) = {x_0}^2 + x_0$$

B2. Οι συναρτήσεις f και g είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο R και ισχύουν $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ και $g(x) = f(x) + \eta\mu 2x$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 4\eta\mu 2\xi$.

B3. Έστω $f(x) = \begin{cases} \eta\mu^2 x\, \eta\mu \frac{1}{x} & x < 0 \\ \alpha & x = 0 \\ e^{-\frac{1}{x}}\, \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x} & x > 0 \end{cases}$

α. Να βρείτε την τιμή του α∈R ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο x_0=α.

β. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = -\int_{\frac{3}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^2} f(x)\, dx$

B4. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει

$xf(x) + 1 \le e^x + \eta\mu 2x$ για κάθε $x \in R$ να αποδείξετε ότι f(0)=3.

ΘΕΜΑ Γ (10+5+10)

Γ1. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = ax + xe^{-x}$

α. Να προσδιοριστεί ο $a \in R$, ώστε η γραφική παράσταση της f να έχει στο σημείο (0,f(0)) εφαπτομένη παράλληλη προς την ευθεία 2x-y+7=0.

β. Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα για α=1.

γ. Να αποδειχθεί ότι η ευθεία y=x είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

Γ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\varphi(x) = -xe^{-x} - e^{-x}$ είναι μια αρχική της $\sigma(x) = xe^{-x}$ στο R.

Γ3. Δίνεται η συνάρτηση $f: R \to R$ συνεχής και παραγωγίσιμη με τύπο

$f(x) = -\frac{x+1}{e^x} + 1, x \in R$

α. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

β. Να λυθεί στο R η ανίσωση $\frac{1+x^2}{3} > \frac{e^{x^2}}{e^2}$

γ. Να βρεθεί το όριο $I = \lim_{x\to+\infty} \int_k^{2015} f(t)\,dt$ όπου y=k είναι η οριζόντια ασύμπτωτη της f στο +∞.

ΘΕΜΑ Δ (10+15)

Δ1. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: R \to R$ για την οποία ισχύει

$(x^2 + x + 1)f'(x) = e^x - (2x+1)f(x)$ για κάθε $x \in R$ και f(0)=1.

α. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{e^x}{x^2+x+1}$, $x \in R$.

β. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

γ. Να αποδείξετε ότι ισχύει:

$\int_0^{y_M} f(ex + y_M)\,dx = \frac{1}{e}\int_1^{e+1} f(x)\,dx$ όπου y_M το τοπικό μέγιστο της f.

Δ2. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \to R$ με β>α>0 και βf(α)=αf(β).

α. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = \frac{f(x)}{x}$ έχει τουλάχιστον μια λύση για

$\xi \in (\alpha, \beta)$.

β. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο Α(ξ,f(ξ)) διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

γ. Αν η f' είναι συνεχής στο [α,β] ώστε να ισχύει:

$$2\int_\alpha^\beta \frac{f'(x)}{x}dx - \int_\alpha^\beta \frac{f^2(x)}{x^3}dx = \ln\frac{\beta}{\alpha}$$

Να βρείτε τον τύπο της f.