



Μάθημα/Τάξη	Γ' Λυκείου
Κεφάλαιο	Παράγωγοι - Θ.Rolle / Θ.M.T - Ακρότατα - Κυρτότητα
Ονοματεπώνυμο Μαθητή	
Ημερομηνία	29/1/2018
Επιδιωκόμενος στόχος	70/100

ΘΕΜΑ Α (5+10+10)

- A1.** α) Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 ;
β) Πότε μια συνάρτηση f λέγεται κυρτή σε ένα διάστημα Δ ;
- A2.** Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο εσωτερικό σημείο x_0 και είναι παραγωγίσιμη σε αυτό να αποδείξετε ότι $f'(x_0)=0$
- A3.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος**:
- α. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ τότε η f παραγωγίζεται στο x_0 .
- β. Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής στο x_0 τότε ορίζεται πάντα εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(x_0, f(x_0))$.
- γ. Αν f συνεχής στο \mathbb{R} τότε η γραφική παράσταση της f παρουσιάζει ακρότατο.
- δ. Αν $x_0 \in \Delta$ και $f'(x_0) \neq 0$ τότε η f δεν παρουσιάζει ακρότατο στο x_0 .
- ε. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής και γνωσίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ , τότε η παράγωγος της είναι υποχρεωτικά θετική.

ΘΕΜΑ Β (4+8+8+5)

- B1.** Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[1,2]$ με $f(2) \neq 6$. Αν $f(1)+f(2)=8$, να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1,2)$ τέτοιο ώστε

$$f(x_0) = x_0^2 + x_0$$



- B2.** Οι συναρτήσεις f και g είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο \mathbb{R} και ισχύουν $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ και $g(x) = f(x) + \eta\mu 2x$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 4\eta\mu 2\xi$.

B3. Έστω $f(x) = \begin{cases} \eta\mu^2 x \eta\mu \frac{1}{x} & x < 0 \\ \alpha & x = 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x} & x > 0 \end{cases}$

Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = \alpha$.

- B4.** Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και ισχύει $xf(x) + 1 \leq e^x + \eta\mu 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι $f(0) = 3$.

ΘΕΜΑ Γ (15+10)

- Γ1.** Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = ax + xe^{-x}$

α. Να προσδιοριστεί ο $a \in \mathbb{R}$, ώστε η γραφική παράσταση της f να έχει στο σημείο $(0, f(0))$ εφαπτομένη παράλληλη προς την ευθεία $2x - y + 7 = 0$.

β. Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα για $\alpha = 1$.



Γ2. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και παραγωγίσιμη με τύπο

$$f(x) = -\frac{x+1}{e^x} + 1, x \in \mathbb{R}$$

α. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

β. Να λυθεί στο \mathbb{R} η ανίσωση $\frac{1+x^2}{3} > \frac{e^{x^2}}{e^2}$

ΘΕΜΑ Δ (10+15)

Δ1. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$(x^2 + x + 1)f'(x) = e^x - (2x + 1)f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0)=1.$$

α. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{e^x}{x^2+x+1}, x \in \mathbb{R}$.

β. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Δ2. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με $\beta > \alpha > 0$ και $\beta f(\alpha) = \alpha f(\beta)$.

α. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = \frac{f(x)}{x}$ έχει τουλάχιστον μια λύση για

$$\xi \in (\alpha, \beta).$$

β. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(\xi, f(\xi))$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.