



Μάθημα/Τάξη:	Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ' Λυκείου
Κεφάλαιο:	1ο+2ο
Όνοματεπώνυμο Μαθητή:	
Ημερομηνία:	28-11-2016
Επιδιωκόμενος Στόχος:	80/100

Θέμα 1°

A. α) Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της; Μονάδες 3

β) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τι λέμε κλίση της f στο x_0 ; Τι εξίσωση έχει η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$; Μονάδες 3

γ) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $f(x_0)$, ποια είναι η παράγωγος της $g \circ f$ στο x_0 ; Μονάδες 2

B. α) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , να αποδείξετε ότι η f είναι και συνεχής στο x_0 . Ισχύει το αντίστροφο;

Μονάδες 3

β) Να αποδείξετε ότι $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $a > 0$. Μονάδες 3

Γ. Να συμπληρώσετε τις προτάσεις:

α) $(\eta\mu x)' = \dots\dots\dots$ $(\epsilon\phi x)' = \dots\dots\dots$ και $(\sigma\phi x)' = \dots\dots\dots$

β) $(a^x)' = \dots\dots\dots$ $(\ln|x|)' = \dots\dots\dots$ και $(e^x)' = \dots\dots\dots$

γ) $[f(x)g(x)]' = \dots\dots\dots$ και $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dots\dots\dots$

δ) $(x^a)' = \dots\dots\dots$ και $[f^v(x)]' = \dots\dots\dots$

Μονάδες 4

Δ. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ).

α) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$, τότε $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = l$ και αντίστροφα.

β) Αν η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 \neq 0$, τότε $\lim_{h \rightarrow 1} f(x_0 h) = f(x_0)$.

γ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ για κάθε σημείο x του πεδίου ορισμού της f .



- δ) Αν $f: A \rightarrow R$ και $(a, x_0) \cup (x_0, \beta) \subseteq A$, τότε για να υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ πρέπει και αρκεί να υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ και να είναι ίσα.
- ε) Αν $f(x) \leq g(x)$ για κάθε x κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.
- στ) Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.
- ζ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ ή $-\infty$.

Μονάδες 7

Θέμα 2^ο**A.** Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax - 2, & \text{αν } x < 1 \\ \beta x^3 + (a-1)x - 1, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$$

η οποία είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(-1, -3)$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f . Μονάδες 2
- β) Να βρείτε τις τιμές των a και β . Μονάδες 5
- γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(1, f(1))$. Μονάδες 3
- δ) Να βρείτε όλες τις εφαπτόμενες της C_f που είναι παράλληλες στην ευθεία:
(η) : $y = 4x - 2016$

Μονάδες 4

B. Μια συνάρτηση $f: R \rightarrow R$ είναι συνεχής στο $x_0=2$ και

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) + \eta\mu 3h - 1}{h} = 7.$$

- α) Να βρείτε την τιμή $f(2)$. Μονάδες 3
- β) Να αποδείξετε ότι η f παραγωγίζεται στο $x_0=2$. Μονάδες 4
- γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(2, f(2))$. Μονάδες 4



Θέμα 3°

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$x^{20} < f(x) < x^{20} + 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

i. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία $y=2x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0,1)$. Μονάδες 7

ii. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, να δείξετε ότι:

α. Η συνάρτηση $g(x) = \frac{1}{f(x)} + \frac{1}{e^x} - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα. Μονάδες 5

β. Η εξίσωση $e^x + f(x) = e^x f(x)$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0,2)$. Μονάδες 6

iii. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^{20} f\left(\frac{1}{x}\right) + 2016 \sin x \right)$ Μονάδες 7

Θέμα 4°

A. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2 \ln x$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της, την μονοτονία και τα ακρότατα της. Μονάδες 6

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της. Μονάδες 5

B. Δίνεται η συνάρτηση g με τύπο $g(x) = e^x(x^2 - 2x + 2) - 2$.

i. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα της.

ii. Να λυθεί η εξίσωση $g(x) = 0$ και να βρεθεί το πρόσημο της g . Μονάδες 3+4

Έστω ότι για τη διπλά παραγωγίσιμη συνάρτηση f ισχύει:
 $f'(x) + e^{f(x)} = e^x(x^2 - 4x + 6) - 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iii. Να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει σημείο της καμπύλης $y=f(x)$ που να δέχεται οριζόντια εφαπτομένη. Μονάδες 7

Καλή επιτυχία