

Μάθημα/Τάξη:	Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ' Λυκείου
Κεφάλαιο:	1ο
Όνοματεπώνυμο Μαθητή:	
Ημερομηνία:	31-10-2016
Επιδιωκόμενος Στόχος:	80/100

Θέμα 1ο

- A.** Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$. Αν
- η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και
 - $f(a) \neq f(\beta)$

δείξτε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(a)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \eta$

7 Μονάδες

- B.** Κυκλώστε το κατάλληλο γράμμα.

i) Αν $f: (a, x_0) \cup (x_0, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (a, x_0) \cup (x_0, \beta)$. Σ Λ

ii) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h)$. Σ Λ

iii) Αν η f συνεχής στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right)$. Σ Λ

iv) Αν η f συνεχής στο $[a, \beta]$ και $f(a) \cdot f(\beta) > 0$ τότε δεν υπάρχει ρίζα της f στο (a, β) . Σ Λ

v) Αν η f συνεχής στο $[a, \beta]$ και το σύνολο τιμών της είναι το $[f(a), f(\beta)]$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[a, \beta]$. Σ Λ

8 Μονάδες

- Γ.** Έστω $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Πότε η f λέγεται συνεχής στο $[a, \beta]$; 5 Μονάδες

Δ. Να αποδείξετε ότι: οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} αντίστοιχα, είναι συμμετρικές ως προς τη διχοτόμο του $1^{ου}$ και $3^{ου}$ τεταρτημορίου $y=x$.

5 Μονάδες

Θέμα 2^ο

A. Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα παρακάτω όρια:

$$i) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x^3 - x - 1| - |x - 7|}{x^2 - 4}$$

$$ii) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x^2 - 4| - x + 2}{x^2 - 2x}$$

Μονάδες 2-3

B. Υποθέστε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η g είναι ασυνεχής στο x_0 . Να αποδείξετε ότι το άθροισμα $f+g$ είναι ασυνεχής στο x_0 .

Μονάδες 10

Γ. Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, και η $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε $f(x) < g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι: $f(f(x)) < g(g(x))$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 10

Θέμα 3^ο

A. Αν $f(x) = x \cdot \eta\mu \frac{1}{x}$ να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[31f(x) - 10f\left(\frac{1}{x}\right) \right]$

Μονάδες 6

B. Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $|\pi^x f(x) - 2016\pi^x| \leq |\eta\mu\pi^x|$ για κάθε x στο $(0, +\infty)$.

i) Να βρείτε το: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi^x}$

Μονάδες 3

ii) Να βρείτε το: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu\pi^x}{\pi^x}$

Μονάδες 4

iii) Να βρείτε το: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Μονάδες 5

Γ. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} η οποία είναι γνησίως αύξουσα. Να αποδειχθεί η ισοδυναμία: $f^{-1}(x) = f(x) \Leftrightarrow f(x) = x$

Μονάδες 7

Θέμα 4ο

A. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x - a}{(x-1)^2}, & x > 1 \\ \frac{2}{3}\beta, & x \leq 1 \end{cases}$$

i) Να προσδιορίσετε τα $a, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής. Μονάδες 6

ii) Για $a = -1$ και $\beta = \frac{3}{2}$ να αποδείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση $y = ax + 4\beta$ τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \sin x$ ακριβώς σε ένα σημείο με τετμημένη x_0 στο $(\pi, 2\pi)$. Μονάδες 6

B. Έστω η συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f: (0,1) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 2}{x} = 3$ και $2\eta\mu(x-1) \leq (x-1)f(x) \leq x^2 - 1$ για κάθε $x \in (0,1)$.

i) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $g(x) = f(x) - \ln x - 3$, για $x \in (0,1)$. Μονάδες 6

ii) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $H(x) = e^{f(x)-3}$ τέμνει τη διχοτόμο των θετικών ημιαξόνων σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0,1)$. Μονάδες 7

Καλή επιτυχία

Συμβουλή: Επειδή τα θέματα είναι πολλά ο χρόνος των τριών ωρών σας φτάνει οριακά. Προσπαθήστε λοιπόν να γράψετε όσον το δυνατόν λιγότερα στο πρόχειρο. Ξεκινήστε από αυτά που είστε πιο σίγουροι.

Επιμέλεια Θεμάτων: Γεωργούλης Μάρκελλος