Μάθημα/Τάξη:	*ΜΑΘ/ΚΑ ΠΡΟΣ/ΣΜΟΥ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ*
Κεφάλαιο:	*ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ-ΟΡΙΑ-ΣΥΝΕΧΕΙΑ*
Ονοματεπώνυμο Μαθητή:	
Ημερομηνία:	*11/11/2019*
Επιδιωκόμενος Στόχος:	*65/100*

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να χαρακτηριστούν οι παρακάτω προτάσεις ως ΣΩΣΤΕΣ ή ΛΑΝΘΑΣΜΕΝΕΣ:

i. Αν η συνάρτηση f δεν έχει ρίζες στο πεδίο ορισμού της, τότε διατηρεί πρόσημο.

ii. Αν η $f \circ f$ είναι γνησίως αύξουσα στο R, τότε και η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

iii. Υπάρχουν συναρτήσεις $f, g: R \to R$ έτσι ώστε η $f \circ g$ είναι 1 προς1, ενώ η g δεν είναι.

iv. Η αντίστροφη της $f(x) = x$ είναι η συνάρτηση $f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$.

v. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, τότε είναι $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ ή $-\infty$.

vi. Αν $f(x) < g(x)$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) < \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.

vii. Αν f συνεχής σε ανοιχτό διάστημα (α, β) , τότε δεν έχει ολικά ακρότατα.

viii. Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{1-x}$ έχει ένα σημείο ασυνέχειας.

ΜΟΝΑΔΕΣ 1,5Χ8=12

Α2. Έστω ο ισχυρισμός:

«αν $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x)| = 1$, τότε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 1$ ή $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -1$» .

I. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό ως ΑΛΗΘΗ ή ΨΕΥΔΗ.

II. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

ΜΟΝΑΔΕΣ 1+3=4

Α3. α) Πότε μια συνάρτηση f καλείται συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$;

β) Να διατυπώσετε το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών και να το αποδείξετε.

ΜΟΝΑΔΕΣ 3+6=9

ΘΕΜΑ Β

Β1. Να βρείτε τη συνάρτηση f για την οποία είναι $f\big(g(x)\big) = 12x^2 - 14x + 4$, εάν γνωρίζουμε ότι $g(x) = 1 - 2x$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

Β2. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln(x-1) - 2$.

a. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
b. Να ορίσετε την f^{-1} .

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

Β3. Να υπολογιστεί το όριο: $A = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+5x+6}+x\right)$

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

Β4. Αν για τη συνεχή συνάρτηση f ισχύει ότι

$\sqrt{4x+1} - 3 \le (x-2)f(x) \le 4\sqrt{x+7} - 12$ για κάθε πραγματικό αριθμό x ,

να υπολογίσετε το $f(2)$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται συνάρτηση $f: R \to R$ με $f^3(x) + 3f(x) = 2x + 5$ για κάθε $x \in R$.

Γ1. Βρείτε τις τιμές $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ και $f\left(-\frac{9}{2}\right)$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

Γ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

Γ3. Να ορίσετε την f^{-1} .

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

Για $f^{-1}(x) = \frac{x^3+3x-5}{2}$:

Γ4. Να υπολογιστεί το όριο : $B = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2f^{-1}(x)+\eta\mu 5x+5}{\eta\mu x}$

ΜΟΝΑΔΕΣ 3

Γ5. Να υπολογιστεί το όριο : $\Gamma = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{f^{-1}(x)}$

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

Γ6. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f $\kappa\alpha\iota$ f^{-1} τέμνονται σε μοναδικό σημείο με τετμημένη που ανήκει στο διάστημα $(1,2)$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις f , g: R→R για τις οποίες ισχύουν:

- $f(0) = 2\,, \quad f(x) \neq x\,, \quad \frac{x-f(x)}{e^x} + \frac{4e^x}{f(x)-x} = 0\,.$
- $g(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad x \leq 0 \\ 2\kappa - x - \ln(x+1) & , \quad x > 0 \end{cases}$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = 2e^x + x$, για κάθε $x \in R$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 8

Δ2. Να αποδείξετε ότι $\kappa = 1$.

ΜΟΝΑΔΕΣ 3

Δ3. Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της g είναι το διάστημα $(-\infty, 2]$ και ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει δύο ρίζες ετερόσημες.

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in R$ με $\alpha \cdot \beta \neq 0$, η εξίσωση

$$\frac{g(\alpha)-2}{x-1} + \frac{g(\beta)-2}{x-2} = 2019$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (1,2).

ΜΟΝΑΔΕΣ 8