



Μάθημα/Τάξη:	ΜΑΘ/ΚΑ ΠΡΟΣ/ΣΜΟΥ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
Κεφάλαιο:	ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ
Όνοματεπώνυμο Μαθητή:	
Ημερομηνία:	10/02/2020
Επιδιωκόμενος Στόχος:	70/100

## ΘΕΜΑ Α

- A1. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο  $x_0$  τότε είναι και συνεχής σε αυτό. ΜΟΝΑΔΕΣ 7
- A2. Πότε μία συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα  $[a, \beta]$  του πεδίου ορισμού της; ΜΟΝΑΔΕΣ 4
- A3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x) = x^a$ , με  $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  με παράγωγο  $f'(x) = ax^{a-1}$ . ΜΟΝΑΔΕΣ 4
- A4. Να χαρακτηριστούν οι παρακάτω προτάσεις ως ΣΩΣΤΕΣ ή ΛΑΝΘΑΣΜΕΝΕΣ :
- Αν η  $f$  δεν είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ , τότε η  $f$  δεν είναι συνεχής στο  $x_0$ .
  - Ισχύει ότι  $(3^x)' = x \cdot 3^{x-1}$ .
  - Έστω συνάρτηση  $f$  ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα  $[a, \beta]$  και σημείο  $x_0 \in [a, \beta]$  στο οποίο η  $f$  παρουσιάζει τοπικό μέγιστο. Τότε  $f'(x_0) = 0$ .
  - Για δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις  $f, g$  παραγωγίσιμες στο  $x_0$  ισχύει ότι  $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g'(x_0)$ . ΜΟΝΑΔΕΣ 4x2.5=10

## ΘΕΜΑ Β

- B1. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} e^x & , x \leq 0 \\ -x^2 + 1 & , x > 0 \end{cases}$ .
- Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη συνέχεια στο πεδίο ορισμού της.
  - Να βρείτε, όπου ορίζεται, την παράγωγο συνάρτηση  $f'(x)$ .
  - Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατά της. ΜΟΝΑΔΕΣ 3+6+4=13



B2. Έστω  $f$  παραγωγίσιμη σε διάστημα  $A$ . Αν η  $f$  είναι κοίλη στο διάστημα  $A$ , να αποδείξετε ότι

$$\frac{f(a)+f(\beta)}{2} \leq f\left(\frac{a+\beta}{2}\right).$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 12

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f: R \rightarrow R$  για την οποία ισχύει:

- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+2h)-f'(x)}{3h} = \frac{40x^3}{3} + 4x$  για κάθε  $x \in R$
- $f'(0) = 1$
- $f(0) = 0$

Γ1. Να δείξετε ότι  $f(x) = x^5 + x^3 + x$ .

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

Γ2. Να δείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

Γ3. Να εξετάσετε την  $f$  ως προς την κυρτότητα και να βρείτε αν έχει σημεία καμπής.

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

Γ4. Βρείτε τη σχετική θέση της γραφικής παράστασης της  $f$  ως προς την ευθεία  $y = x$  και στη συνέχεια να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της  $f^{-1}$ .

ΜΟΝΑΔΕΣ 6



### ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f$  για την οποία ισχύει:

- $f(x) + 2f'(x) + (e^{-x} + 1)f''(x) = 1$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$
- $f(0) = 0$
- $f'(0) = \frac{1}{2}$

Δ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $g(x) = (e^x + 1)f(x) - e^x + 1$  είναι σταθερή.

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

Δ2. Να δείξετε ότι  $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ .

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

Δ3. Να γράψετε τη συνάρτηση  $f$  ως σύνθεση δύο ή περισσότερων συναρτήσεων.

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

Δ4. Να δείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη  $f^{-1}$ .

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

Δ5. Για  $x > 0$  να λυθεί η εξίσωση

$$(x - 1)(e^{1-x} + 1) - (x + 1)(e^{1-x} - 1) = 0.$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 6