



Μάθημα/Τάξη:	<b>ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ</b>
Κεφάλαιο:	<i>Εφ' όλης της διδαχθείσας ύλης</i>
Όνοματεπώνυμο Μαθητή:	
Ημερομηνία:	
Επιδιωκόμενος Στόχος:	<b>90/100</b>

## ΘΕΜΑ Α

**A1.** Δώστε τους ορισμούς της 1-1 συνάρτησης και του ολικού ελαχίστου μιας συνάρτησης  $f$  ορισμένης στο σύνολο  $A \subseteq \mathbb{R}$ .

6 μονάδες

**A2.** Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις με  $\Sigma$  εάν είναι σωστές ή με  $\Lambda$  εάν είναι λανθασμένες.

i) Ισχύει πάντα ότι  $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

ii) Η  $f(x) = \sin x$  δεν είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της.

iii) Αν η  $f$  είναι 1-1 σε ένα διάστημα  $\Delta$  τότε είναι και γνήσια μονότονη στο  $\Delta$ .

iv) Αν  $f(x) < g(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$  και  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = m$  τότε ισχύει πάντα ότι  $l < m$ .

v) Οι συναρτήσεις  $f^{-1} \circ f$  και  $f \circ f^{-1}$  είναι ταυτοτικές στα σύνολα που ορίζονται.

vi) Αν η  $f$  είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της η εξίσωση  $f(x) = 1$  έχει το πολύ μία λύση στο  $D_f$ .

vii) Η  $f(x) = x^2 + 1$  έχει  $\min f = 1$ .

viii) Η  $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$  δεν είναι συνάρτηση.

ix) Η  $f(x) = |x|$  και η  $g(x) = \sqrt{x^2}$  είναι ίσες συναρτήσεις.

x) Οι συναρτήσεις  $f(x) = \ln x^2$  και  $g(x) = 2 \ln x$  είναι ίσες.

( 1 μονάδα το κάθε ερώτημα ) – 10 μονάδες



**A3.** Δικαιολογείστε τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα **iv)**, **vi)** και **χ)**.

9 μονάδες

### ΘΕΜΑ Β

**B1.** Δίνεται η  $f: R \rightarrow R$ , εάν για κάθε  $x \in R$  ισχύει ότι  $f(x^3 + 1) = x^3 + 2$ :

α. Αποδείξτε ότι η  $f(x) = x + 1$ .

5 μονάδες

β. Βρείτε τις  $f \circ g$  και  $g \circ f$  όταν  $g(x) = \sqrt{x-1}$  και αποδείξτε ότι είναι 1-1.

8 μονάδες

γ. Βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)+x-1}$ .

6 μονάδες

**B2.** Δίνονται οι σχέσεις  $h(k(x)) = x^2$  και  $k(h(x)) = 2x$  για κάθε  $x \in R$  και συνάρτηση  $k: R \rightarrow R$ , δείξτε ότι:

α.  $k \circ h \circ k(x) = k(x^2)$  και  $2k(x) = k(x^2)$  για κάθε  $x \in R$

β. Η  $h$  δεν είναι συνάρτηση.

(2 μονάδες το α ερώτημα και 4 μονάδες το β) 6 μονάδες

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η  $f: R \rightarrow R$  που είναι γνησίως μονότονη στο  $R$  και ικανοποιεί τα εξής:

- $e^x - 2 \leq f(x) \leq \frac{-2x^2 + 1}{x^2}$  για κάθε  $x < 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \eta\mu x - 1}{\eta\mu x + x} = 2021$

**Γ1.** Βρείτε τα  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  και  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

3 μονάδες



**Γ2.** Δείξτε ότι η  $f$  είναι γνήσια αύξουσα στο  $R$ .

5 μονάδες

**Γ3.** Βρείτε τα  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$  και  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+x-1}{\eta\mu x}$ .

10 μονάδες

**Γ4.** Αν γνωρίζετε ότι  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ , αποδείξτε ότι  $f(f(x^2 + x + 1) - 1) > 1$  για κάθε  $x \in R$ .

7 μονάδες

### ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η  $f: R \rightarrow R$ , εάν για κάθε  $x \in R$  ισχύει ότι  $f^3(x) + f(x) = x$  και  $f(R) = R$ :

**α.** Δείξτε ότι η  $f$  είναι γνήσια αύξουσα.

5 μονάδες

**β.** Βρείτε τον τύπο της  $y = f^{-1}(x)$

3 μονάδες

**γ.** Υπολογίστε τα όρια  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^3(x)+f(x)-\sqrt{x}}{2x+3\sqrt{x}}$  και  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(x)}{\sqrt{f(f^{-1}(x))-1}}$

8 μονάδες

**δ.** Βρείτε τα κοινά σημεία των  $f^{-1}(x)$  και  $f(x)$ , καθώς και την σχετική τους θέση.

9 μονάδες

Καλή επιτυχία!!!