



Μάθημα/Τάξη:	Μαθηματικά Γ' Γενικού Λυκείου
Όνοματεπώνυμο Μαθητή:	
Ημερομηνία:	20/01/2024

**ΘΕΜΑ Α**

**A1)** Δώστε τον ορισμό της παραγωγίσιμης συνάρτησης σε ένα διάστημα  $[\alpha, \beta]$ .

(Μονάδες 5)

**A2)** Εξηγήστε γιατί η  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$  δεν είναι παραγωγίσιμη στο  $[-1,1]$ .

(Μονάδες 5)

**A3)** Αντιστοίχιση:

$f$	$f'$
(1) $\epsilon\varphi 2x$	(i) $3\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu x$
(2) $\eta\mu^3 x$	(ii) $\sigma\upsilon\nu^3 x$
(3) $x^x$	(iii) $\frac{2}{\sigma\upsilon\nu^2 2x}$
(4) $3^x$	(iv) $3^x \ln 3$
(5) $\sqrt[5]{x^6}$	(v) $x^x \ln x + x^x$
	(vi) $x3^{x-1}$
	(vii) $\frac{6\sqrt[5]{x}}{5}$
	(viii) $\frac{6x^5}{2\sqrt[5]{x^6}}$

Σε κάθε στοιχείο της πρώτης στήλης αντιστοιχεί μόνο ένα στοιχείο της δεύτερης.

(Μονάδες  $5 \cdot 1 = 5$ )

**A4)** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό ή Λάθος:

- 1) Αν η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ , τότε στο  $A(x_0, f(x_0))$  δέχεται εφαπτομένη.
- 2) Η  $f(x) = \sqrt[7]{x^8}$  είναι παραγωγίσιμη στο 0.
- 3) Αν το  $M(1,3)$  ανήκει στην  $C_f$  και  $f(x) \geq 3$  για κάθε  $x \in D_f$  τότε  $\min f = 3$ .
- 4) Αν η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $[\alpha, \beta]$  ισχύει το ΘΜΤ.
- 5) Η εξίσωση  $e^x + x^3 + \eta\mu x = 0$  έχει μια τουλάχιστον λύση στο  $\mathbb{R}$ .

(Μονάδες  $5 \cdot 2 = 10$ )



### ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση,  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , που είναι γνησίως μονότονη. Αν τα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2 - f(1)(e^x + x)}{x + \sin x - 1} \quad \text{και} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3e^t + 3 + f(2)(e^t + 2)}{t + \eta \mu t}$$

είναι πραγματικοί αριθμοί:

**B1)** Αποδείξτε ότι η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$ .

(Μονάδες 8)

**B2)** Λύστε την ανίσωση  $f(f(x) + 3) > f(1) + f(2) + 2$ .

(Μονάδες 8)

**B3)** Αποδείξτε ότι η  $f(x) = 0$  έχει μόνο μια ρίζα στο  $(1 - \alpha, 2 + \alpha)$  με  $\alpha > 0$ .

(Μονάδες 9)

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση  $f(x) = x^\nu(x^\nu - 1)(x^\nu + 1)(x^\nu - 2^\nu) + 1$ , όπου  $\nu$  φυσικός και  $\nu \geq 1$ .

**Γ1)** Αποδείξτε ότι η  $C_f$  δέχεται 3 τουλάχιστον εφαπτομένες παράλληλες στον  $x'x$ .

(Μονάδες 7)

**Γ2)** Αν η εφαπτομένη στο  $M(1, f(1))$  είναι η  $y = -2x + 3$ , βρείτε τον βαθμό του πολυωνύμου  $y = f(x)$ .

(Μονάδες 8)

**Γ3)** Αν  $\nu = 1$ , δικαιολογήστε γιατί οι εφαπτομένες παράλληλες στον  $x'x$  είναι ακριβώς τρεις

(Μονάδες 4)

**Γ4)** Βρείτε τα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^{4\nu} - 2x^{2\nu} + 1} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^{4\nu} - 2x^{2\nu} + 1}.$$

(Μονάδες 3+3=6)



**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύουν:

- 1)  $f$  παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ ,
- 2)  $f(0) = 1$ ,
- 3)  $f(x)f'(x) + x = e^{2x} - f(x) - xf'(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Δ1)** Αποδείξτε ότι  $f^2(x) + 2xf(x) = e^{2x} - x^2$ .

(Μονάδες 8)

**Δ2)** Βρείτε τον τύπο της  $f$ .

(Μονάδες 8)

**Δ3)** Αν  $f(x) = e^x - x$  και  $f(ax) + ax \geq 1 + x$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , βρείτε:

i) το  $a$ .

(Μονάδες 6)

ii) το  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [(f(x) + x)\eta\mu x]$ .

(Μονάδες 4)

**Διάρκεια Διαγωνίσματος : 3 ώρες**

**Καλή επιτυχία!!!**